# オンオフ間欠性と大自由度カオス

鹿児島大学・理学部・物理　　秦 浩起

非線形力学系の大自由度カオスは乱れた運動の中に様々な秩序構造を含有し，それがカオスにランダムとは異なる多様な彩りを生み出している。この秩序構造と乱れの共存は広い意味での（時間的空間的）間欠性と言えようが，その認識の視点や理解の枠組みは形成されていない。講演では，その形成を目指す幾つかの試みを紹介した。この報告では分量の関係上詳細を述べる事はできないので主に要点を記し,4b)項のみ多少の説明を加えるものとする。

尚，ここで用いたモデルは，主にある種の結合写像系[1]

$$u_{t+1}(x) = \int dy\phi(x-y)f(u_t(y)), \quad \phi(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp(-r^2/4) \tag{1}$$

（ここで $u_t(x)$ は 1 次元空間上の位置 $x$ での離散時刻 $t$ における状態量； $f(u) = a - u^2$ はコントロールパラメター $a$ を持つ写像；[2]境界条件はシステムサイズ $L$ の周期境界 $u(x+L) = u(x)$）及び，空間を離散的 $(j = 0, 1, 2, ..., N-1)$ にした coupled map lattice

$$u_j(t) = (1-c)f(u(_j(t)) + \frac{c}{2}\{f(u_{j-1}(t)) + f_{j+1}(t)\}, \quad (j = 0, 1, 2, ..., N-1) \tag{2}$$

（$u_N(t) = u_0$ という周期境界条件をとる）である。

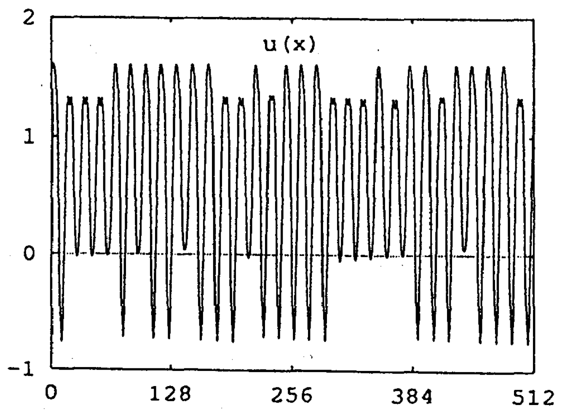


図 1: ある dynamical glass のアトラクター。時間的には 4 ステップ後にこのパターンに戻る。空間パターンの凹凸には周期性は見えず異なった初期条件からは異なった凹凸のパターンに落ち着く。

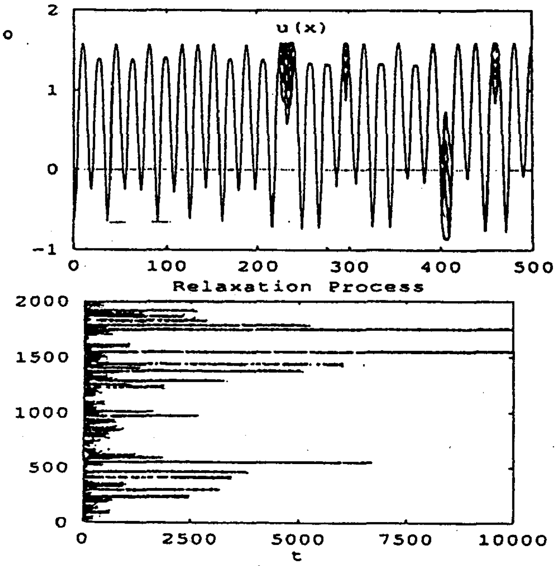


図 2: dynamical glass のアトラクターへの緩和過程。上図のように空間的にほぼ整った部分と乱れた defect からなる。その defect の時間的な変化を記したのが下図。

**1.** dynamical glass　　ダイナミクス (1) において $1.5 \le a \le 1.7$ 付近で「乱れた空間パターンを持つ時間的には周期運動のアトラクター」(図 1) が非常に多数共存する状態（個数はシステムサイズ $L$ に対し指数関数的に増加）。[1]

[1] 拡散反応型の発展方程式からある条件の下で導くことができる。

[2] 変数変換で logistic map と同じ

**1a)dynamical glassへの緩和過程** 初期状態から出発した時, 上記のアトラクターへのカオス的緩和過程は以下のようである。1) 初期段階で, ほぼ周期的に運動するドメインが空間の全域を覆うように形成され, 局在する乱れた運動の部分 (defect) が散在するように残る。2) その後, defect が, その個数 $N_d(t) \sim t^{-\beta}, \beta \simeq 0.75$ のように冪的に減少する (図 2)。これは, (有限時間での) 正のリアプノフ数の個数の変化やリアプノフスペクトル全体などにも反映する。[2]

**1b)dynamical glassの構造的臨界性** dynamical glass 状態がコントロールパラメターの変化に対してどのように応答するかを数値的に調べた。パラメター $a$ を $a_0$ に固定して (相空間に一様に分布する異なった初期状態から) 形成されたアトラクター群 $A_i, i = 1, 2, ..., N \gg 1$ は, $a$ を増加させると各々 $a = a_c(A_i)$ で不安定化する。その分岐点までのパラメター空間における距離 $\varepsilon(A_i) \equiv a_c(A_i) - a_0$ はシステムサイズ $L \to \infty$ で $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(A_i)/N \sim L^{-\alpha}, \alpha \simeq 0.5$ のように振る舞う。すなわち, 系は $L \to \infty$ で統計的に構造安定性を失うと言える。このような性質は $a$ の空間で有限の区間観察される。このことはパラメターに拠らず相空間の構造の大部分が僅かな変化で崩壊するということになり, この性質を構造的臨界性と名付けた。[2]

**2. 時空カオス中の隠れた長時間相関** ダイナミクス (1) の時空カオスを見ると, $u_t(x)$ の時間相関が指数的に減衰している状況でも最大リアプノフ数を与えるベクトル $\mathbf{e}_1(t)$ の時間相関は冪的な減衰 ($\sum_{t'=0,T-1} \mathbf{e}_1(t') \cdot \mathbf{e}_1(t'+t)/T \sim t^{-\beta'}$) を示すことがある。このような時空カオス中の冪的な長時間相関は様々なところで観測されている [5] がその起源は明らかになっていない。

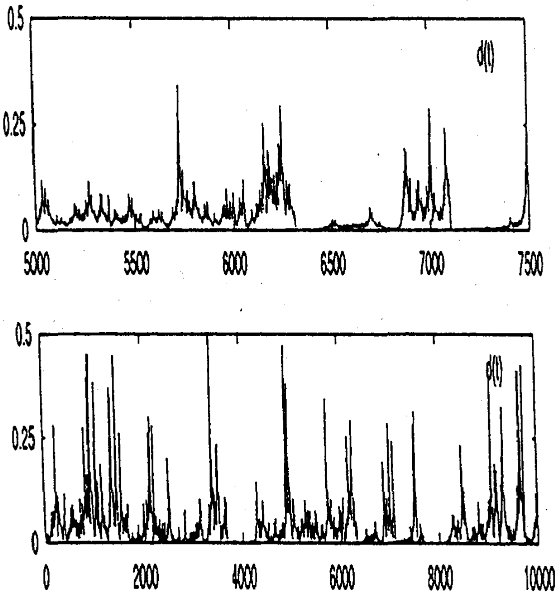


図 3: 空間一様解からのずれ $d(t)$ の時系列。$d(t) < d_c$ をラミナー (off) 状態とすると, その継続時間の分布は $P(\tau) \sim \tau^{-1.5}$ のように振る舞う。

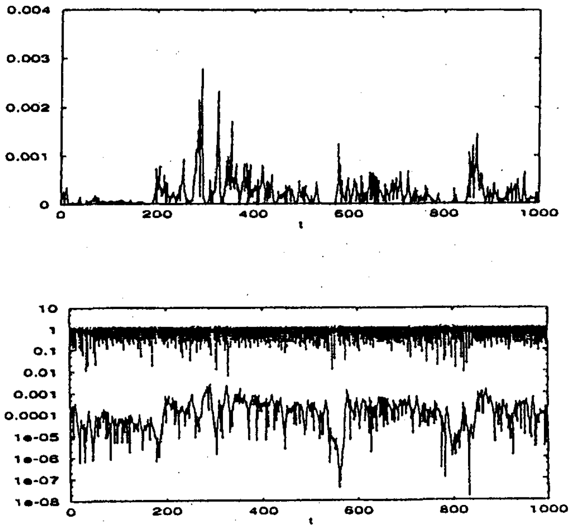


図 4: $a_4(t)$ の時系列。ラミナー (off) とバースト (on) の間欠的繰り返しからなる。このラミナーの継続時間 $\tau$ の分布は図 6 に示されている。下図は $a_1(t)$ と共に図示したもので $a_4(t)$ が $a_1(t)$ に対し十分小さいことがわかる。この故に $a_4(t)$ の間欠的運動は $u_j(t)$ の中では埋もれてしまう。

**3.** オンオフ間欠性 (主にレビュー) 2つのカオス振動子の結合系は, 結合が強いと引き込んだカオス運動を示す。この結合を弱めると引き込み運動の破れが起こるが, その転移点直後でオンオフ間欠性と呼ばれる運動が見られる。これは転移以前は低次元の不変多様体 $M$ 上に

あったアトラクターが，パラメターの変化によって，$M$ の外の方向 $\mathbf{e}_\perp$ に不安定化する事によって起こる。この際 $\mathbf{e}_\perp$ 方向の軌道拡大率は平均値 0 のまわりで時間的に揺らぎ，長時間相関を持つオンオフ間欠性を生み出す。最近，この運動の統計的な性質，例えばオフ（ラミナー）状態の継続時間分布 $P(\tau) \sim \tau^{-1.5}$ やアトラクターの構造が解明されてきた（詳細は [4]）。

**4.** 大自由度系カオスの間欠性　　大自由度カオスの中の様々な転移は運動状態の実効的自由度の変化であることが多く，オンオフ間欠性と類似の側面を持つと予想される。

**4a)** 空間一様性の破れとオンオフ間欠性　　ダイナミクス (1) は常に空間一様状態 $u_t(x) = u_t$ を持つ。その状態（空間一様に対応する多様体 $M_h$ 上のカオス運動）は，$L < L_c$ で安定（$\mathbf{e}_\perp$ 方向のリアプノフ指数は $\Lambda_\perp < 0$）であるが，$L_c$ を超えると不安定（$\Lambda_\perp > 0$）になる。転移点直後で軌道は $M_h$ のまわりでオンオフ間欠性を示す（図 3 に $M_h$ からの距離 $d(t) \equiv \int_0^L dx(u_t(x) - \bar{u}_t)^2/L, \bar{u}_t \equiv \int_0^L u_t(x)/L$ の時系列を示した）。この間欠性は基本的に低次元のオンオフ間欠性で理解され，統計的な性質等もそれに一致する。

**4b)** アトラクターの共存と間欠性　　ダイナミクス (2) はコントロールパラメター $(a, c)$ に応じて様々な運動形態を持つが，一般に $a$ が大きく $c$ が小さいところでより乱れた自由度の高い運動を示す。ここで議論するのは，(結合 $c$ が適当で) 時空的に乱れているが何らかの空間的相関が残っている状態である。それを捉えるために $u_j(t)$ を $u_j(t) = \sum_{k=0}^{N/2} a_k(t) \cos(2\pi k \frac{j}{N} + \delta(t))$ のように空間的にフーリエ展開した振幅 $a_k(t)$ と位相 $\delta(t)$ で議論しよう。$a = 1.52$ のように固定し $c$ を減少させていこう。この時 (系全体の自由度に対し) 比較的自由度の低かったカオスアトラクターA ($a_4 = 0$) は，$c = c_* \simeq 0.4$ を境に新しい自由度 (波数 $k = 4$ のフーリエ成分等) を獲得し，より大自由度のアトラクターBへ転移する。この転移に際し第 3 リアプノフ指数が正に転じる。この際，相空間内の軌道を見ると，Aの乗っていた不変多様体 $M$ の近傍で $a_4$ を含む方向 $\mathbf{e}_\perp$ に 3,4a) 項と類似のオンオフ間欠性が起こる (図 4)。しかし，新しい $\mathbf{e}_\perp$ 方向の成分は非常

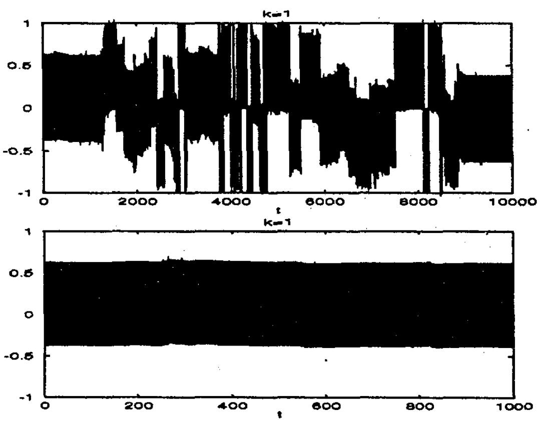


図 5: $\delta_1(t)$ の時系列を示したものである。4 つの”準アトラクター”をカオス的に巡る運動が見られる。下図と図 4 を比べると，この間欠的運動がオンオフ間欠性の時間スケールより長い運動であることがわかる。

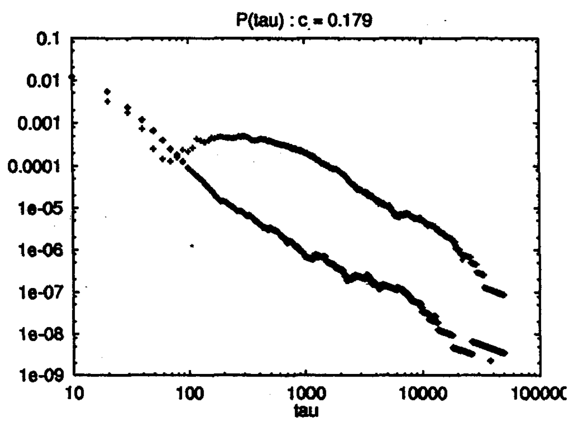


図 6: $a_4(t)$ の時系列のオフ状態の継続時間の分布（図中の下のグラフ）と $\delta_1(t)$ の時系列から得られる”準アトラクター”での滞在時間の分布 (上のグラフ)。前者は $P(\tau) \sim \tau^{-1.5}$ と振る舞い、後者も同じ冪的な減衰に見えるが理論的に明らかではなく断定できない。

に小さく全体の $u_j(t)$ の運動の中では他の自由度に埋もれて一般に見えない。

だが, この系では並進対称性により $c > c_*$ ではAに当たるアトラクターが複数共存 ($A_i$) する。この場合, $A_i$ の不安定化に際し相空間の大域的な構造によって複数の"準アトラクター"(元の $A_i$ 近傍の何らかの準安定的な構造) をカオス的に巡る運動が発生する (図5)。この"準アトラクター"間の間欠的運動は, $A_i$ 近傍の局所的な不安定化によって起こるが, その時間スケールは"準アトラクター"でのオンオフ間欠性の時間スケールより長く (図6) 相空間の大域的な構造の中で実現されているものである。[6] [3]

冒頭に「幾つかの試み」と述べたが, これらの試みは互いに絡み合いながら大自由度カオスの間欠性を解明する方向を目指している。例えば, 1a) 項の dynamical glass への遅い緩和は, 実空間での局所的な構造が順に安定化 (defect の消失) する過程である。これを相空間の軌道で見ると多様体 $M$ 上を長時間運動していた軌道がより少数自由度の多様体 $M'$ 上の運動に制限され, 更に $M''$ にという過程と言える。この時, $M$ から $M'$ へ $M'$ から $M''$ への時間的転移は4項で述べた大自由度カオスの間欠性との関連が予感される。又, 2項の時空カオス中の長時間相関は (より) 直接的に4項に絡むと考えられる。但し, この長時間相関の指数は1.5に限らず3,4b) 項の指数1.5とは一致しないので, 何らかの更なる仕掛けの存在が予想される。その1つは大自由度カオスにおいてリアプノフスペクトルが0近傍に集積することである[5]。このことは4b) 項と類似の転移が連続的に起こっていることを示唆させ, その時の間欠性が如何なるものかの解明が重要となる。[7]

低次元カオスの研究においては, 時系列の (決定論であるが長時間で確率的に見える) 振る舞いと相空間でのアトラクターの構造という2つの側面が不可欠であった。大自由度系では相空間の構造は極めて複雑であるが, (この研究でも見られたように) それをうまく切り出す事と, 時系列の振る舞いの研究とが密接に絡むことが大自由度カオスを解き明かす鍵となると思う。更に, 「どう見るか見えるか」という面も見逃せない。つまり, 相空間の構造の変化や特定の変数の時間変化を我々が「どう見る」か我々が興味ある運動の中で「どう見える」かを考えねばならない面もあるように感じられる。(紙数は尽きた後は思考の間欠的放浪の旅へ)

## 参考文献

[1] dynamical glass は, H.Fujisaka et al. Phys.Lett.A**174**(1993)103 や H. Fujisaka et al. in Dynamical Systems and Chaos, vol.2 eds. Y.Aizawa et al., (World Scientific, 1995).

[2] dynamical glass の構造的臨界性や冪的な緩和プロセスは, H. Hata et al. Prog.Thor.Phys. **95**(1996)45 や H.Hata et al. International Journal of Bifurcation and Chaos vol. 7(1997).

[3] 空間一様解の不安定化に伴うオンオフ間欠性は秦他 1996 秋の分科会講演 (1p-YM-5) .

[4] 低次元オンオフ間欠性は, 藤坂博一他 日本物理学会誌 **51**(1996), 813 及びその参考文献やオンオフの仕掛けを理解するには厳密に解けるモデルに則した研究 H.Hata and S.Miyazaki submitted to Phys. Rev. E. もよいかもしれない。

[5] 結合写像系の複雑多様な振る舞いは, 金子邦彦・津田一郎「複雑系のカオス的シナリオ」(1996) 朝倉書店.

[6] 大自由度カオスの間欠性とカオス的遍歴などの話は準備中 (H.Hata et al.).

[7] 連続的転移についても global coupled map をモデルに研究会後, 進展しているがここでは述べない。

[3] このような運動はカオス的遍歴と呼ばれる現象の1つとも言えようが, より深い理解は [7] を待たねばならない。